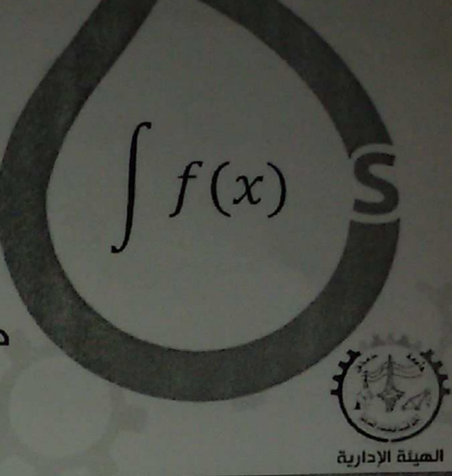




هندسة الميكانيك العام

السنة الأولى

رياضيات (2)

د. إسماعيل ادريس

التاريخ/4/4/2016

RBO HAMAK

الهيئة الإدارية

---

* المعادلة التفاضلية التامة :

- نعلم أن التفاضل التام يعطى :

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

إذا جعلنا التفاضل التام معدوماً فنحصل على المعادلة :

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad \boxed{1}$$

هذه المعادلة تسمى بالمعادلة التفاضلية التامة وحلها :

$$df(x,y) = 0 \Longrightarrow f(x,y) = c$$

أما في حال أعطيت المعادلة التفاضلية بالصيغة

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad \boxed{2}$$

بالمقارنة بين $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد :

$$\boxed{3}\quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad \& \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \quad \boxed{4}$$





لإيجاد الحل العام للمعادلة [2] نفرض أن الحل العام هو:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y) \qquad \boxed{5}$$

نشتق التابع [5] جزئياً بالنسبة لـ(y) فنحصل على:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \phi'(y) = N(x,y)$$

$$\phi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

نكامل فنجد:

$$\phi(y) = \int N(x,y) - \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right]dy$$

نعوض في [5] فيكون الحل العام:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int N(x,y)\,dy - \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right]dy$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(6x^2 + 4xy + y^2)\,dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy = 0$$





(الحل) لمعرفة الحل ما هو الشرط كي تكون المعادلة التفاضلية تامة :
لإيجاد الشرط اللازم كي تكون المعادلة التفاضلية تامة نشتق [3] بالنسبة لـ (y) ونشتق [4] بالنسبة لـ (x) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

إذا كان M و N مستمرين عندئذ :

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

6 يبدأ حل المثال السابق من هنا :

$$M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y$$

$$N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

فالمعادلة تامة ولتحديد الحل العام :

$$f(x,y) = \int M(x,y)\, dx + \varphi(y) = 2x^2 + 2x^2 y + xy^2 + \varphi(y)$$

نشتق جزئياً بالنسبة لـ (y) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2x^2 y + \varphi'(y) \Rightarrow 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\varphi'(y) = -3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -y^3 + c$$

وبالتالي :

$$\boxed{f(x,y) = 2x^3 + 2x^2 y + xy^2 - y^3 = c}$$





ملاحظة:

- في حالة $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ فعندئذ نقول أن المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ هي معادلة تفاضلية غير تامة، إلا أنه يمكن جعل هذه المعادلة تامة وذلك من خلال ضرب المعادلة بعامل معين يسمى: **عامل التكامل** ويرمز له μ.

- طريقة تعيين عامل التكامل:

إذا كانت المعادلة $M(x,y)dx+N(x,y)$ غير تامة نضرب طرفي المعادلة بـ $\mu(x,y)$ تصبح تامة أي أنه:

$$\mu(x,y) \cdot M(x,y)dx + \mu(x,y) \cdot N(x,y)dy = 0$$

أصبحت معادلة تفاضلية تامة:

$$\mu_y \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$$

$$\mu [M_y - N_x] = \mu_x \cdot N - \mu_y \cdot M \quad (*)$$

نميز الحالتين:

1) إذا كانت $\mu(x,y) = \mu_x \Leftarrow \mu_y = 0$, $\mu_x = \frac{d\mu}{dx}$

تصبح المعادلة (*): $\mu [M_y - N_x] = N \cdot \frac{d\mu}{dx}$

$$\div N \Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} dx = \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow \ln \mu = \int \frac{M_x - N_y}{N} dx$$



حيث $\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$ فيكون لدينا :

$$\ln \mu = \int p(x)\,dx \Rightarrow \mu_{(x)} = e^{\int p(x)\,dx}$$

[2] إذا كان $\mu(x,y) = \mu(y) \Leftarrow 0 = \mu_x$ ، $\mu_y = \frac{d\mu}{dy}$

بالتعويض في (*) فيكون :

$$\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $y(2x+y)\,dx + (3x^2+4xy-y)\,dy = 0$

الحل:

$M(x,y) = y(2x+y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y$

$N(x,y) = 3x^2+4xy-y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6x + 4y$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

فهي غير تامة.

نجد عامل التكميل :

$$M(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} \cdot dy}$$

$$M_y - N_x = 2x + 2y - 6x - 4y = 4x - x^2 y$$

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-(4x+2y)}{-(2x+y)y} = \frac{2(2x+y)}{(2x+y)y} = \frac{2}{y}$$

$$M(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = y^2$$



نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل $M(y)$:

$$\underbrace{y^3(2x+y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(3x^2+4xy-y)y^2}_{N(x,y)}dy = 0$$

لايجاد الحل العام:

$$f(x,y) = \int (2xy^3 - y^4)\,dx + \varphi(y)$$

$$= x^2y^3 + xy^4 + \varphi(y)$$

نشتق جزئياً بالنسبة لـ (y) فيكون:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 4xy^3 + \varphi'(y) = 3x^2y^2 + 4xy^3 - y^3$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = -y^3 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{1}{4}y^4 + c$$

نعوض فنجد: $f(x,y) =$

$$\boxed{x^2y^3 + xy^4 - \frac{y^4}{4} = c_1}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(3x^2+2y)dx + (2x\ln 3x + \frac{3x}{y})dy = 0$$

الحل:

$$M(x,y) = 3x^2 + 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2$$

$$N(x,y) = 2x\ln 3x + \frac{3x}{y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2\ln 3x + \frac{3}{3x} + 2x + \frac{3}{y}$$





$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ فهي معادلة تفاضلية غير تامة :

نجد عامل التكميل

$M_y - N_x = -(2\ln 3x + \frac{3}{y})$

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-1}{x} = P(x)$

$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

نضرب طرفي المعادلة ب $\frac{1}{x} = \mu$ فينتج معادلة تامة .

#ViVA RBCs

*ملاحظة : إذا كانت لدينا معادلة تفاضلية غير تامة لحلها ونريد تحويلها إلى معادلة تفاضلية تامة فإننا نضرب بعامل التكميل ولنا حرية الاختيار بالضرب ب :

$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$ أو $\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$

حيث $P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$